Розв'язання Push/Fold гри

Андрій Севастьянов (mustitz)

12 липня 2016 р.

Анотація

У цій статті я хочу описати у подробицях, як можна обчислити точку Неша для ряду покерних ігор, де гравці обмежені діями у торгах таким чином, що немає насиченої постфлоп торгівлі.

1 Вступ

В інтернеті гуляють таблиці оптимальної гри для Texas Hold'em NL у Push/Fold грі, де перший з гравців (SB) має вибір між «All-in» та «Fold» а другий (BB) грає у звичайний покер, тобто при своєму ході має вибір між «Call» та «Fold». Називається ця таблиця "HeadsUp Push/Fold Nash Equilibrium". У цій статті вони наведені відповідно у таблицях 1 та 2. Я давно мріяв перевірити обчислення цих таблиць.

Зараз набуває популярності гра Hold'em Six Plus, яка концептуально схожа з Texas Hold'em. З обчислювальної точки зору ця гра простіше за Texas Hold'em. На початок роботи я не знав вирішення Push/Fold Nash Equilibrium гри для цієї гри, то й вирішив вибрати її у якості піддослідного пацюка.

На початку зробимо стислий огряд результатів теорії ігор.

Базовим поняттям цієї теорії є *чиста стратегія*. Чиста стратегія це набір детермінованих правил, які у будь якій ігровій ситуації дають нам відповідь на питання «як діяти?» Епітет «детермінований» тут дуже важливий. Чиста стратегія не може радити нам кидати монетку для вибору ходу. Правила начебто «З $\boxed{A}\boxed{A}$ граємо «Raise 3 BB» у 80% випадків та «Call» у 20%» не є детермінованими, та не можуть входити до чистої стратегії. Якщо гравець дотримується чистої стратегії, то у разі, коли ігрова ситуація повторюється, він знову та знову приймає однакові рішення.

Табл. 1: Точка Неша для SB у Texas Hold'em Push/Fold грі

o\s	A	K	Q	J	10	9	8	7	6	5	4	3	2
A	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+
K	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	19.9	19.3
Q	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	16.3	13.5	12.7
J	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	18.6	14.7	13.5	10.6	8.5
10	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	11.9	10.5	7.7	6.5
9	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	14.4	6.9	4.9	3.7
8	20+	18.0	13.0	13.3	17.5	20+	20+	20+	20+	18.8	10.1	2.7	2.5
7	20+	16.1	10.3	8.5	9.0	10.8	14.7	20+	20+	20+	13.9	2.5	2.1
6	20+	15.1	9.6	6.5	5.7	5.2	7.0	10.7	20+	20+	16.3	$*^1$	2.0
5	20+	14.2	8.9	6.0	4.1	3.5	3.0	2.6	2.4	20+	20+	$*^2$	2.0
4	20+	13.1	7.9	5.4	3.8	2.7	2.3	2.1	2.0	2.1	20+	$*^3$	1.8
3	20+	12.2	7.5	5.0	3.4	2.5	1.9	1.8	1.7	1.8	1.6	20+	1.7
2	20+	11.6	7.0	4.6	2.9	2.2	1.8	1.6	1.5	1.5	1.4	1.4	20+

$*^1$ **63s** 7.1–5.1, 2.3–1.
$*^2$ **53s** 12.9–3.8, 2.4–1.
$*^3$ **43s** 10.0–4.9, 2.2–1.

Табл. 2: Точка Неша для BB у Texas Hold'em Push/Fold грі

o\s	A	K	Q	J	10	9	8	7	6	5	4	3	2
A	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+
K	20+	20+	20+	20+	20+	20+	17.6	15.2	14.3	13.2	12.1	11.4	10.7
Q	20+	20+	20+	20+	20+	16.1	13.0	10.5	9.9	8.9	8.4	7.8	7.2
J	20+	20+	19.5	20+	18.0	13.4	10.6	8.8	7.0	6.9	6.1	5.8	5.6
10	20+	20+	15.3	12.7	20+	11.5	9.3	7.4	6.3	5.2	5.2	4.8	4.5
9	20+	17.1	11.7	9.5	8.4	20+	8.2	7.0	5.8	5.0	4.3	4.1	3.9
8	20+	13.8	9.7	7.6	6.6	6.0	20+	6.5	5.6	4.8	4.1	3.6	3.5
7	20+	12.4	8.0	6.4	5.5	5.0	4.7	20+	5.4	4.8	4.1	3.6	3.3
6	20+	11.0	7.3	5.4	4.6	4.2	4.1	4.0	20+	4.9	4.3	3.8	3.3
5	20+	10.2	6.8	5.1	4.0	3.7	3.6	3.6	3.7	20+	4.6	4.0	3.6
4	18.3	9.1	6.2	4.7	3.8	3.3	3.2	3.2	3.3	3.5	20+	3.8	3.4
3	16.6	8.7	5.9	4.5	3.6	3.1	2.9	2.9	2.9	3.1	3.0	20+	3.3
2	15.8	8.1	5.6	4.2	3.5	3.0	2.8	2.6	2.7	2.8	2.7	2.6	15.0

Приклад: Наведені таблиці 1 та 2 є гарним прикладом чистої стратегії для гравців SB та BB відповідно при ефективних стеках до 20 BB. Наприклад, у SB Q♣6♠. Ефективний стек 10 BB. Оскільки $10 > 9.6$, то згідно таблиці 1 треба грати «Fold».

Приклад: У грі камінь-ножиці-папір є лише три чисті стратегії: називати кожен раз камінь, називати кожен час ножиці, називати кожен час папір.

Приклад: У хрестиках-нуликах чистою стратегією для хрестиків буде аркуш, на якому буде намальовані усі можливі позиції, у яких хід хрестиків, та позначка, куди треба ходити.

Приклад: Якщо брати покер загалом, то, на відміну від хрестиків-нуликів, опис позиції має містити не тільки те, що ми бачимо зараз (наші кишенькові карти, стеки та гроші у банку), але й історію гри. Наприклад, якщо у нас 2♠2♦, на флопі A♥Q♠2♣, у банку 6 BB, а стеки гравців 17 BB, то треба відрізняти позицію, яка виникла після

(1) SB: «Call 1 BB», BB: «Raise 3 BB», SB:«Call 3 BB».

від позиції, яка виникла після

(2) SB: «Raise 3 BB», BB: «Call 3 BB».

В залежності від минулого перебігу подій, хід, встановлений чистою стратегією у ситуації (1) може відрізнятися від ходу, який встановлено у ситуації (2).

У математиці *гра двох осіб з нульовою сумою* це дві множини чистих стратегій H^I та H^{II} першого та другого гравців відповідно, та функція $\mathfrak{L} : H^I \times H^{II} \to \mathbb{R}$, яка кожній парі стратегій $h^I \in H^I$ та $h^{II} \in H^{II}$ ставить дійсне число $\mathfrak{L}(h^I, h^{II})$, яке показує виграш гравця I, (програш гравця II) у разі, якщо перший гравець притримується стратегії h^I, а других гравець притримується стратегії h^{II}. Якщо гра містить елемент випадковості, як, наприклад, покер, то під $\mathfrak{L}$ можна розуміти математичне очікування виграшу першого гравця.

Приклад: Припустимо, що обидва гравці SB та BB розігрують лише кишенькових тузів AA у Push/Fold варіанті звичайного Texas Hold'em. Позначимо ці стратегії як $h^I_{\mathbf{AA}}$ та $h^{II}_{\mathbf{AA}}$ відповідно. Спробуємо обчислити $\mathfrak{L}(h^I_{\mathbf{AA}}, h^{II}_{\mathbf{AA}})$.

Ймовірність того, що SB отримає двох тузів дорівнює $\frac{1}{221}$. У цьому випадку другий гравець може отримати $\binom{50}{2} = 1225$ різних комбінацій кишенькових карт, з кишенькова пара тузів буде єдиною комбінацією. Перерахуємо,

З ймовірністю $\frac{1}{221} \cdot \frac{1}{1225}$ перший гравець зіграє «All-in», а другий відповість «Call». У цьому випадку математичне очікування виграшу першого гравця дорівнює $EV = 0$ (порівняння двох пар тузів не дає переваги жодному з гравців).

З ймовірністю $\frac{1}{221} \cdot \frac{1224}{1225}$ перший гравець зіграє «All-in», а другий відповість «Fold». За цих обставин виграш першого гравця складає $EV = 1$ BB (вкрадений блайнд).

З ймовірністю $\frac{220}{221}$ перший гравець зіграє «Fold». У цьому випадку виграш другого гравця $EV = -1/2$ BB (перший гравець віддав свою половину блайду без боротьби).

Підсумуємо:

$$\mathfrak{L}(h^I_{\mathbf{AA}}, h^{II}_{\mathbf{AA}}) = \frac{1}{221} \cdot \frac{1}{1225} \cdot 0 + \frac{1}{221} \cdot \frac{1224}{1225} \cdot 1 - \frac{220}{221} \cdot \frac{1}{2} \approx -0.4977 \text{ BB}.$$

Стратегія називається *змішаною*, якщо вона утворена з множини чистих стратегій, та ймовірностями вибору кожної з чистих стратегій, який робиться на початку гри.

Приклад: У грі камінь-ножиці-папір змішаною стратегію буде називати камінь або ножиці, або папір з рівними ймовірностями. Ця стратегія утворена з трьох стратегій: «камінь», «ножиці», «папір», кожна з яких вибирається на початку гри з ймовірністю 1/3.

Стратегія називається *оптимальною*, якщо вона забезпечує гравцю максимально можливий виграш. Це все добре звучить, але на практиці інколи досить важко вирішити, яким чином обчислювати цей максимально можливий виграш. Тому є декілька принципів оптимальності: рівновага Нешу, ефективність Парето, ... Але якщо розглядати гру двох осіб з нульовою сумою, а ми розглядаємо саме таку гру, то тут все набагато простіше. Є теорема, за якою для кожної такої гри є можна знайти ціну гри L^*, а також хоча б одну стратегію для первого гравця, яка забезпечить йому виграш L^* незалежно від дій його суперника, а також хоча б одну стратегію для другого гравця, яка забезпечить йому програш не більшу ніж L^*. Ця оптимальна стратегія може бути чистою, але у загальному випадку вона змішана.

Приклад: Стратегія 1/3–1/3–1/3 є оптимальною у грі камінь-ножиці-папір. Дійсно, якщо перший гравець вибирає цю стратегію, то другий гравець не може виграти більше ніж 0. Але, якщо другий гравець вибере цю стратегію, то вже перший не зможе виграти більше ніж 0. Таким чином, нуль це ціна цієї гри.

Помітимо, що з практичної точки зору нам необов'язково кожен раз знаходити саме оптимальну стратегію. Якщо є простіша стратегія, яка гарантує трохи гірший, але майже той самий результат, при цьому вона простіша в обчисленні або простіша у запам'ятовуванні, то немає сенсу використовувати більш складну.

Приклад: Стратегії, які наведені у таблицях 1 та 2 чисті. Більш того, за винятком трьох рук, нам треба пам'ятати лише порогове значення, до якого треба розігрувати руку. Якщо замінити чисті стратегії на змішані, то для кожного типу руки та кожного значення ефективного стеку нам треба буде пам'ятати ймовірність, з якою треба розігрувати руку, що набагато складніше.

Що є чистою стратегією у нашій Push/Fold грі? Виділімо множину H типів стартових рук. Зазвичай це кишенькові карти, які невідомі іншим гравцям, де симетричні комбінації згруповані, ми не відрізняємо шість різних комбінації кишенькових тузів, для нас це одна рука $\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{A}}$.

Приклад: У Texas Hold'em множина H складається з 13 кишенькових пар, $\binom{13}{2} = 78$ одномасних карт та $\binom{13}{2} = 78$ різномастих карт. Усього множина H містить 139 елементів.

Приклад: У Hold'em Six Plus множина H складається з 9 кишенькових пар, $\binom{9}{2} = 36$ одномасних карт та $\binom{9}{2} = 36$ різномастих карт. Усього множина H містить 81 елемент.

Чиста стратегія SB це підмножина $H^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} \subseteq H$ типів рук, з якими він грає «All-in». Аналогічна ситуація для BB, чиста стратегія, відповідно, інша множина типів рук $H^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} \subseteq H$, з якими він грає «Call». Стратегію можна також розгляди як елемент множини $\mathfrak{B}(H)$ усіх можливих стратегій, де символом $\mathfrak{B}(X)$ позначається множина усіх можливих підмножин множини X, або *булеан* X.

Приклад: У Texas Hold'em кожен з гравців вибирає одну з $2^{169} \approx 7.5 \cdot 10^{50}$ різних стратегій.

Приклад: У Hold'em Six Plus кожен з гравців вибирає одну з $2^{81} \approx 2.4 \cdot 10^{24}$ різних стратегій.

Стратегію також можна задавати за допомогою характеристичних векторів A^I та A^{II}, який містить рівно $|H|$ різних елементів, кожен з яких відповідає одному та лише одному елементу $h \in H$:

$$A^I_h = \begin{cases} 1, & \text{якщо } h \in H^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}}, \\ 0, & \text{якщо } h \notin H^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}}. \end{cases}$$

Такі позначення будуть більш зручними у формулах. Також, якщо дозволити елементам вектора A приймати значення від нуля до одиниці, ми отримаємо засіб для визначення змішаних стратегій.

Будь яку ігрову ситуацію, яка виникає у Push/Fold грі двох осіб, можна описати двома параметрами: розміром ефективних стеків s, який будемо вимірювати у великих блайндах, та розміром маленького блайнду b. У разі анте ми просто поділимо додаткові гроші між гравцями, та додамо їх до блайндів.

Приклад:
Блайнди \$0.5 та \$1, анте немає,
стек SB \$20,
стек BB \$20.
Тут $s = 20$, $b = 0.5$.

Приклад:
Блайнди 100 та 200, анте 20,
стек BTN 3800,
стек SB 1000,
стек BB 1400,
BTN «Fold».
Тут ситуація трохи складніше. Спочатку обов'язкові гроші, котрі внесли гравці. Гравець SB вніс $100 + 20 = 120$. Гравець BB вніс $200 + 20 = 220$. Також поділимо між гравцями 20 фішок, котрі внесли інші гравці. Отримуємо, що ми можемо припустити, що перший гравець вніс $120 + 10 = 130$, другий гравець вніс $220 + 10 = 230$. Таким чином, $s = 1000/230 = 4.348$, $b = 130/230 = 0.565$.

2 Система позначень

Поговоримо трохи про систему позначень. В майбутньому ми будемо часто використовувати різні ймовірності, математичні очікування та багато інших понять, які пов'язані з дією конкретного гравця. Щоб на заплутатися в позначеннях p_0, p_1, p_2, p^*, $\hat{p}$, ... будем завжди позначати гравця у верхньому індексі, а дію—у нижньому. При цьому гравця SB будемо вважати гравцем I, а гравця BB відповідно II. Наприклад, $P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}}$ це ймовірність того, що BB зіграє «Call». Справедливі наступні тотожності:

$$
\begin{aligned}
P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{fold}} + P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} &= 1, \\
P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{fold}} + P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} &= 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{win}} + P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{lose}} &= 1, \\
P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} + P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{lose}} &= 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{win}} &= P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{lose}}, \\
P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{lose}} &= P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}}.
\end{aligned}
$$

Суми $\sum_{h \in H}$ також будуть нам зустрічатися дуже часто. Будемо у такому разі просто писати $\sum_h$ за замовчуваннам не вказуючи належність h до H.

Введемо також допоміжну функцію $\bar{x} = 1 - x$, яка часто буде використатися з характеристичним вектором A для роботи за діапазоном, який не входить до A.

Покер тісно пов'язаний з комбінаторикою. У майбутньому нам будуть корисні наступні константи: K_1—кількість комбінацій, які може отримати SB, та K_2—кількість комбінацій, які може отримати BB при умові, що перший зафіксовані карти SB.

Приклад: Для Hold'em Six Plus $K_1 = \binom{36}{2} = 630$, та $K_2 = \binom{34}{2} = 561$.

Приклад: Для Texas Hold'em $K_1 = \binom{52}{2} = 1326$, та $K_2 = \binom{50}{2} = 1225$.

Оскільки ми розглядаємо типи рук, то не різні типи рук матимуть різну ймовірність. Нам треба знати для кожного типу руки кількість комбінацій, до яких вона входить. Будемо позначати її C_h. Справедлива тотожність:

$$
\sum_h C_h = K_1.
$$

Приклад: $C_{\mathbf{JJ}} = 6$, це J♠J♣, J♠J♦, J♠J♥, J♣J♠, J♣J♥ та J♦J♥. $C_{\mathbf{ATs}} = 4$, це A♠10♠, A♣10♣, A♦10♦ та A♥10♥. $C_{\mathbf{KQo}} = 12$.

Також для кожної пари типів рук h_1 та h_2 нам треба знати кількість комбінацій $C^{h_2}_{h_1}$ того, що у першого гравця буде тип руки h_1, а у другого h_2. Справедливі тотожності:

$$
\begin{aligned}
C^{h_2}_{h_1} &= C^{h_1}_{h_2} \quad \forall h_1, h_2 \in H, \\
\sum_{h_2} C^{h_2}_{h_1} &= K_2 C_{h_1} \quad \forall h_1 \in H.
\end{aligned}
$$

Приклад: $C^{\mathbf{99}}_{\mathbf{99}} = 6$, це 9♠9♣ vs 9♦9♥, 9♠9♦ vs 9♣9♥, ... $C^{\mathbf{J6o}}_{\mathbf{KTo}} = 12 \cdot 12 = 144$.

Ще нам для кожної пари типів рук h_1 та h_2 треба знати ймовірність виграшу першої руки при порівнянні. Це дискретна функція двох аргументів, котру можна представити у вигляді матриці W розміру $|H| \times |H|$, де строки відповідають різним типа рук першого гравця, а стовпці—різним типам рук другого гравця, а на перехресті розташовано значення ймовірності $W^{h_2}_{h_1}$ перемоги h_1 над h_2

Приклад: Для Hold'em Six Plus матриця W має вигляд:

$$
W = \begin{pmatrix}
1/2 & W^{\mathbf{KK}}_{\mathbf{AA}} & \dots & W^{\mathbf{76o}}_{\mathbf{AA}} \\
W^{\mathbf{AA}}_{\mathbf{KK}} & 1/2 & \dots & W^{\mathbf{76o}}_{\mathbf{KK}} \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
W^{\mathbf{AA}}_{\mathbf{76o}} & W^{\mathbf{KK}}_{\mathbf{76o}} & \dots & 1/2
\end{pmatrix}.
$$

3 Основні ймовірності

Добре, припустимо нам відомі спектри гравців A^I та A^{II}. Для початку обчислимо ймовірності кожного ходу та ймовірність перемоги при порівнянні. Хід SB не залежить від карт, які були роздані другому гравцю, так що нам треба просто поділити кількість рук, з якими гравець іде «All-in» на загальну кількість рук:

$$P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} = \frac{\sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}}{K_1},$$
$$P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{fold}} = \frac{\sum_{h_1} \bar{A}^I_{h_1} C_{h_1}}{K_1}.$$

Приклад: Припустимо, що ми розглядаємо Hold'em Six Plus. Спектр SB складається лише з кишенькових тузів $H^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} = \{\mathbf{AA}\}$. Тоді $C_{\mathbf{AA}} = 6$, суму у знаменнику ми вже обчислювали—це 630. Отримаємо $H^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} = 6/630 \approx 0.95\%$.

Для BB ситуація дещо складніше. Ймовірність, з якою він зіграє «Call» вже буде залежти від того, які карти буде розігрувати SB[1]:

$$P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} = \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}}{K_2 \sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}},$$
$$P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{fold}} = \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} \bar{A}^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}}{K_2 \sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}}.$$

Приклад: Припустимо, що ми розглядаємо Hold'em Six Plus. Спектр обох гравців складається лише з кишенькових тузів: $h = \mathbf{AA}$, $H^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} = H^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} = \{h\}$. Тоді $C^h_h = 6$,

$$\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1} = C^h_h = 6,$$
$$K_2 \sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1} = K_2 C_h = 561 \cdot C_h = 561 \cdot 6,$$
$$P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} = \frac{6}{561 \cdot 6} = \frac{1}{561} \approx 0.18\%.$$

Цей результат легко пояснити: якщо ми зафіксуємо два тузи в руці SB, то BBможе перепасти будь яка з K_2, комбінацій, серед яких є лише одна пара тузів.

Ймовірність виграшу та програшу при порівнянні знайти просто: треба розглянути усі можливі пари $h_1 \in H^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}}$, та $h_2 \in H^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}}$ з урахуванням вагового коефіцієнту, який пропорційний кількості комбінацій. У знаменники піде повна сума таких пар. У чисельник кожну пару треба ще додатково помножити на ймовірність виграшу:

$$P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{win}} = P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{lose}} = \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} W^{h_2}_{h_1} C^{h_2}_{h_1}}{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}},$$
$$P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{lose}} = P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} = \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} W^{h_1}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}}{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}}.$$

Приклад: Обчислимо ймовірність виграшу у Hold'em Six Plus у разі, коли $H^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} = \left\{\boxed{K}\boxed{K}\right\}$ та $H^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} = \left\{\boxed{A}\boxed{A}, \boxed{K}\boxed{K}\right\}$. Ми маємо $C^{\mathbf{AA}}_{\mathbf{AA}} = 6$, $C^{\mathbf{KK}}_{\mathbf{AA}} = 36$, $W^{\mathbf{AA}}_{\mathbf{AA}} = 1/2$, $W^{\mathbf{AA}}_{\mathbf{KK}} \approx 0.254191$.

$$P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{win}} = \frac{6 \cdot 0.5 + 36 \cdot 0.254191}{6 + 36} = \frac{3 + 9.150876}{42} = \frac{12.150876}{42} \approx 28.93\%.$$

Помітимо, що наведені формули не втрачають працездатності у випадку, коли вектори A^I та A^{II} відповідають змішаним стратегіям. У цьому разі серед елементів A^I та A^{II} можуть з'являтися не лише нулі та одиниці, а ще ймовірності розіграшу відповідної руки.

[1]Від A^{II} залежить ймовірність ходу «Call» BB при умові, що нього дійшло слово, тобто SB зіграв «All-in». Безумовна ймовірність появи ходу «Call» зі сторони BBдорівнює $P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}}$.

4 Математичне очікування

Перейдемо до обчислення математичного очікування. Зазвичай у покері прийнято обчислювати EV на момент прийняття рішення. При цьому домовляються, що $EV_{\mathbf{fold}} = 0$. Тобто за початок обліку береться «Fold», а інші альтернативи обчислюються у порівнянні з ним. Але для розв'язання гри це трохи незручно. Так, ми можемо розглядати $EV^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}}$, $EV^{\mathbf{I}}_{\mathbf{fold}} = 0$, $EV^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}}$ та $EV^{\mathbf{II}}_{\mathbf{fold}} = 0$, але у цьому випадку $EV^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}}$ та $EV^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}}$ пов'язані нетривіальним співвідношенням.

Прив'яжемо усі наші математичні очікування до початку гри. Тобто SB у разі ходу «Fold» втрачає малий блайнд: $EV^{\mathbf{I}}_{\mathbf{fold}} = -b$. За цих умов, якщо нам відомі спектри гравців $H^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}}$ та $H^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}}$, то ми можемо обчислити EV^I та EV^{II}, при цьому $EV^I + EV^{II} = 0$, тобто $EV^I = -EV^{II}$, що є підтвердженням того факту, що ми маємо гру з нульовою сумою. Таким чином,

$$\begin{aligned}
EV^I &= -bP^{\mathbf{I}}_{\mathbf{fold}} + 1 \cdot P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{fold}} + sP^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{win}} - sP^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{lose}},\\
EV^{II} &= bP^{\mathbf{I}}_{\mathbf{fold}} - 1 \cdot P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{fold}} + sP^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} - sP^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{lose}}.
\end{aligned}$$

Спробуємо розкрити вираз для EV^I:

$$\begin{aligned}
P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{win}} &= \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}}{K_2 \sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}} \cdot \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} W^{h_2}_{h_1} C^{h_2}_{h_1}}{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}},\\
P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{win}} &= \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} W^{h_2}_{h_1} C^{h_2}_{h_1}}{K_2 \sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}}.
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{lose}} = \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} W^{h_1}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}}{K_2 \sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}}.$$

Далі,

$$\begin{aligned}
&P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{win}} - P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{lose}} = \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}\left(W^{h_2}_{h_1} - W^{h_1}_{h_2}\right)}{K_2 \sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}},\\
&s\, P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{win}} - sP^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{lose}} = sP^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}}\left(P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{win}} - P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{call}} P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{lose}}\right) =\\
&= s\frac{\sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}}{K_1} \cdot \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}\left(W^{h_2}_{h_1} - W^{h_1}_{h_2}\right)}{K_2 \sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}} =\\
&= s\ \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}\left(W^{h_2}_{h_1} - W^{h_1}_{h_2}\right)}{K_1 K_2}.
\end{aligned}$$

Ще спростимо

$$\begin{aligned}
P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{fold}} &= \frac{\sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}}{K_1} \cdot \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} \bar{A}^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}}{K_2 \sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1}},\\
P^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}} P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{fold}} &= \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} \bar{A}^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}}{K_1 K_2}.
\end{aligned}$$

Остаточно отримаємо

$$\begin{aligned}
EV^I &= -b\frac{\sum_{h_1} \bar{A}^I_{h_1} C_{h_1}}{K_1} + \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} \bar{A}^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}}{K_1 K_2} + s\ \frac{\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}\left(W^{h_2}_{h_1} - W^{h_1}_{h_2}\right)}{K_1 K_2},\\
EV^I &= \frac{-bK_2 \sum_{h_1} \bar{A}^I_{h_1} C_{h_1} + \sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} \bar{A}^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1} + s\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1}\left(W^{h_2}_{h_1} - W^{h_1}_{h_2}\right)}{K_1 K_2}.
\end{aligned}$$

Особисто мені не дуже приємно працювати з $\bar{A}^I_{h_1}$ та $\bar{A}^{II}_{h_2}$, тому скористаємося рівностями $\bar{A}^I_{h_1} = 1 - A^I_{h_1}$ та $\bar{A}^{II}_{h_2} = 1 - A^{II}_{h_2}$ щоб уникнути їх:

$$EV^I = \frac{-bK_2 \sum_{h_1}(1 - A^I_{h_1})C_{h_1} + \sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1}(1 - A^{II}_{h_2})C^{h_2}_{h_1} + s\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1}A^{II}_{h_2}C^{h_2}_{h_1}\left(W^{h_2}_{h_1} - W^{h_1}_{h_2}\right)}{K_1K_2},$$
$$EV^I = \frac{-bK_2 \sum_{h_1} C_{h_1} + bK_2\sum_{h_1} A^I_{h_1}C_{h_1} + \sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1}C^{h_2}_{h_1} - \sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1}A^{II}_{h_2}C^{h_2}_{h_1} + s\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1}A^{II}_{h_2}C^{h_2}_{h_1}\left(W^{h_2}_{h_1} - W^{h_1}_{h_2}\right)}{K_1K_2},$$
$$EV^I = \frac{-bK_1K_2 + bK_2\sum_{h_1} A^I_{h_1}C_{h_1} + K_2\sum_{h_1} A^I_{h_1}C_{h_1} - \sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1}A^{II}_{h_2}C^{h_2}_{h_1} + s\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1}A^{II}_{h_2}C^{h_2}_{h_1}\left(W^{h_2}_{h_1} - W^{h_1}_{h_2}\right)}{K_1K_2},$$
$$EV^I = -b + \frac{(b+1)K_2\sum_{h_1} A^I_{h_1}C_{h_1} + \sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1}A^{II}_{h_2}C^{h_2}_{h_1}\left(sW^{h_2}_{h_1} - sW^{h_1}_{h_2} - 1\right)}{K_1K_2}. \quad (1)$$

5 Мінорантна гра з точки зору BB

Розглянемо мінорантну гру, тобто BB буде обирати спектр A^{II} знаючи спектр A^I. З точки зору BB ми отримали просту задачу оптимізації: треба мінімізувати функцію $L_1 = EV^I \to \min$. Або, то теж саме, треба максимізувати функцію $L_2 = EV^{II} = -EV^I \to \max$.

З точки зору оптимізації ми можемо спростити вираз для L_2. По-перше, ми можемо множити значення L_2 на будь яку константу, це не змінить задачу оптимізації. По-друге, ми можемо додавати до L_2 будь яку константу, це також на змінює задачі оптимізації. Тому, розглядаючи (1) ми можемо позбавитися першого доданка $-b$, потім позбавитися знаменника (помножити L_2 на $1/K_1K_2$), та першого доданка у чисельнику (константа, яка не залежить від $A^{II}_{h_2}$. Отримаємо

$$L_2 = -\sum_{h_1}\sum_{h_2} A^I_{h_1}A^{II}_{h_2}C^{h_2}_{h_1}\left(sW^{h_2}_{h_1} - sW^{h_1}_{h_2} - 1\right).$$

Змінимо порядок сумування:

$$L_2 = \sum_{h_2} A^{II}_{h_2}\sum_{h_1} A^I_{h_1}C^{h_2}_{h_1}\left(sW^{h_1}_{h_2} - sW^{h_2}_{h_1} + 1\right).$$

Позначимо

$$\lambda_2(A^I, h_2) = \sum_{h_1} A^I_{h_1}C^{h_2}_{h_1}\left(sW^{h_1}_{h_2} - sW^{h_2}_{h_1} + 1\right). \quad (2)$$

Тоді

$$L_2 = \sum_{h_2} A^{II}_{h_2}\lambda_2(A^I, h_2).$$

Якщо ретельно подивитися на цей вираз, то можна помітити, що значення L_2 є сума з $|H|$ додатків $A^{II}_{h_2}\lambda_2(A^I, h_2)$, кожний з яких відповідає деякому $h_2 \in H$ і не залежить від решти елементів H. Таким чином ми можемо оптимізувати кожен доданок $A^{II}_{h_2}\lambda_2(A^I, h_2)$ окремо. Це дуже легко зробити. Оскільки $0 \le A^{II}_{h_2} \le 1$, то збільшує або зменшує наш доданок значення L_2 залежить виключно від знаку $\lambda_2(A^I, h_2)$. Якщо $\lambda_2(A^I, h_2) > 0$, то максимальне значення наш доданок отримає при $A^{II}_{h_2} = 1$. Якщо $\lambda_2(A^I, h_2) < 0$, то максимальне значення наш доданок отримає при $A^{II}_{h_2} = 0$. Це легко записати як

$$A^{II}_{h_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \lambda_2(A^I, h_2) < 0, \\ 1, & \text{якщо } \lambda_2(A^I, h_2) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

А що робити, якщо $\lambda_2(A^I, h_2) = 0$? Тоді наш додаток дорівнює нулю незалежно від значення $A^{II}_{h_2}$. Таким чином гравцю BB байдуже як грати, «Fold» чи «Call». Все рівно не не змінить значення EV. Можливо хтось подумає, що це виключно теоретичний випадок, а у реальному житті таке трапляється лише раз у рік та два рази на Пасху, коли зірки збігаються й $\lambda_2(A^I, h_2) = 0$. Якщо розглядати чисті стратегії, то так воно і є.

Але, якщо придивитися, то можна помітити, що формула (3) можна застосовувати також у разі, коли гравець SB грає за змішаною стратегією. Припустимо, що стратегія A^I є оптимальною змішаною стратегію, у свою чергу оптимальна стратегія гравця BB також буде змішаною, тоді ми отримаємо $\lambda_2(A^I, h_2) = 0$ для всіх типів рук, що мають розігруватися недетерміновано, тобто з певною ймовірністю, яка відмінна від нуля та одиниці. Таким чином вираз (2) допоможе поділити усі типи рук на три категорії:

- руки які не треба розігрувати ($A^{II}_{h_2} = 0$) коли $\lambda_2(A^I, h_2) < 0$;
- руки які треба розігрувати ($A^{II}_{h_2} = 1$) коли $\lambda_2(A^I, h_2) > 0$;
- руки які треба розігрувати з певною ймовірністю ($0 < A^{II}_{h_2} < 1$) коли $\lambda_2(A^I, h_2) = 0$.

Ще трохи займемся жонглюванням. Оскільки гравець BB знає спектр гравця SB та шанси виграти банк, то його рішення може бути виведено через нерівність, до якої буде входити лише ефективний стек та шанс перемоги:

$$\begin{aligned}
&\lambda_2(A^I, h_2) \geq 0,\\
&\sum_{h_1} A^I_{h_1} C^{h_2}_{h_1} \left(sW^{h_1}_{h_2} - sW^{h_2}_{h_1} + 1\right) \geq 0,\\
&s \sum_{h_1} A^I_{h_1} C^{h_2}_{h_1} \left(W^{h_1}_{h_2} - W^{h_2}_{h_1}\right) \geq -\sum_{h_1} A^I_{h_1} C^{h_2}_{h_1},\\
&s\frac{\sum_{h_1} A^I_{h_1} C^{h_2}_{h_1} \left(W^{h_1}_{h_2} - W^{h_2}_{h_1}\right)}{\sum_{h_1} A^I_{h_1} C^{h_2}_{h_1}} \geq -1,\\
&s(P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} - P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{lose}}) \geq -1.
\end{aligned}$$

Звідки умову гри «Call» для першого гравця можна виразити або через ймовірність перемоги:

$$\begin{aligned}
&s(2P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} - 1) \geq -1 \Leftrightarrow 2sP^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} \geq s - 1 \Leftrightarrow\\
&P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} \geq (s-1)/2s,
\end{aligned} \tag{4}$$

або через ефективний стек:

$$\begin{cases} s \geq 0, & \text{якщо } P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} \geq P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{lose}},\\ s \leq 1/(P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{lose}} - P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}}), & \text{якщо } P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} < P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{lose}} \end{cases}. \tag{5}$$

Таким чином, якщо значення $P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} \geq P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{lose}}$, або $P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} \geq 50\%$, то BB треба грати «Call» не міркуючи. А якщо значення $P^{\mathbf{II}}_{\mathbf{win}} < 50\%$, то треба рахувати шанси за формулою (4) або (5).

6 Мажорантна гра з точки зору SB

Цей розділ у цілому аналогічний попередньому, лише коефіцієнти мають змінитися. Розглянемо тепер мажорантну гру, тобто тепер гравець SB буде обирати стратегію A^I знаючи стратегію A^{II} гравця на BB. Це задача максимізації функції $L_1 = EV^I \to \max$. Спростимо вираз для L_1:

$$L_1 = (b+1)K_2 \sum_{h_1} A^I_{h_1} C_{h_1} + \sum_{h_1} \sum_{h_2} A^I_{h_1} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1} \left(sW^{h_2}_{h_1} - sW^{h_1}_{h_2} - 1\right)$$

$$L_1 = \sum_{h_1} A^I_{h_1} \left((b+1)K_2 C_{h_1} + \sum_{h_2} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1} \left(sW^{h_2}_{h_1} - sW^{h_1}_{h_2} - 1\right)\right)$$

Як й у попередньому розділі, ми також отримали суму доданків, кожен з котрих можна оптимізувати окремо. Нехай

$$\lambda_1(h_1) = (b+1)K_2 C_{h_1} + \sum_{h_2} A^{II}_{h_2} C^{h_2}_{h_1} \left(sW^{h_2}_{h_1} - sW^{h_1}_{h_2} - 1\right)$$

$$L_1 = \sum_{h_1} A^I_{h_1} \lambda_1(h_1)$$

Таким чином, якщо $\lambda_1(h_1) > 0$, то нам прибутково розігрувати тип рук h_1. Якщо $\lambda_1(h_1) < 0$, то, відповідно, цей тип рук розігрувати невигідно. Якщо, $\lambda_1(h_1) = 0$, то ми можемо як розігрувати тип рук h_1, так і грати «Fold», це не впливає на результат.

Знову помітимо, що формули не втрачають працездатності у разі, коли BB грає за змішаною стратегією.

7 Мінорантна гра з точки зору SB

До цього була елементарщина. Переходимо до смачного питання—обчислення оптимальної чистої стратегії гравця SB у мінорантній грі. Тобто такої чистої стратегії, яка буде давати йому максимальний прибуток при умові, що гравець BB знає, що малий блайнд грає за цією чистою стратегією.

Чому це так цікаво? Якщо уважно подивитися на таблиці 1 та 2 Push/Fold гри, то ми побачимо, що там показані чисті стратегії, а не змішані. Для кожного типу рук там вказаний діапазон значень ефективного стеку, при якому треба розігрувати руку. А це означає, розв'язок мінорантної гри для SB й буде розв'язком усієї гри. Або, принаймні, цей розв'язок буде розташований недалеко від оптимального.

Припустимо, що ми розглядаємо стратегію $H^{\mathbf{I}}_{\mathbf{allin}}$. Як оцінити, чи далеко вона розташована від оптимальної? обчислимо контрстратегію $A^{II} = \varphi^{II}_{I}(A^{I})$, яка її експлуатує. Таким чином ми можемо обчислити значення $L_1 = \mathfrak{L}(A^I, A^{II})$, яке гарантує стратегія A^I. Те ж саме можно повторити для стратегії A^{II} гравця BB, таким чином ми побужуємо контрстратегію $A^{I'} = \varphi^{I}_{II}(A^{II})$, та значення значення $L_2 = \mathfrak{L}(A^{I'}, A^{II})$, яке гарантує стратегія A^{II}. Якщо $L_1 = L_2$, то нам повезло. Стратегії A^I та A^{II} є оптимальними. Якщо $L_1 \neq L_2$, то різниця $\Delta = L_2 - L_1$ дасть нам оцінку того, наскільки далеко стратегії A^I та A^{II} далеко розташовані від оптимальних.

Тут трохи недописано, але головна ідея полягає у тому, що можна розпочати обчислення з ефективного стеку $s = 1$, для якого розв'язок елементарний—треба розігрувати весь спектр. А потім з певним кроком (наприклад $h = 0.1$) рухатися до розміру стеку, який нас цікавить. На кожному кроці ми можемо перевіряти, чи обчислений раніше розв'язок буде оптимальним, чи ні. Якщо ні, то з огляд на гладкість ми будемо знаходитися поруч з оптимальним розв'язком, тому нам треба подивитися варіанти поруч. Це працює для Hold'em Six Plus.